Mesures et incertitudes : mémento pour le professeur

1. Erreurs et incertitudes

1.1. Erreur de mesure

■ Quelques définitions

On considère une grandeur physique notée x.

- **Valeur vraie** : valeur que l'on trouverait si on procédait à une mesure parfaite de cette grandeur. Par définition la valeur vraie n'est jamais connue.
- **Le mesurage** (que nous appellerons « mesure » devant des lycéens) est un processus consistant à obtenir expérimentalement une valeur pouvant être attribuée à la grandeur mesurée.
- **Valeur mesurée** : valeur que l'on obtient par mesurage. Elle est notée x_{mes} et n'est jamais rigoureusement égale à la valeur vraie.
- **Erreur de mesure** : différence $x_{mes} - x_{vraie}$. L'erreur de mesure ne peut pas être connue, puisque x_{vrai} ne peut pas l'être.
- **Valeur expérimentale** : valeur notée x_{exp} obtenue expérimentalement, par mesurage unique ou multiple, ou par calcul.

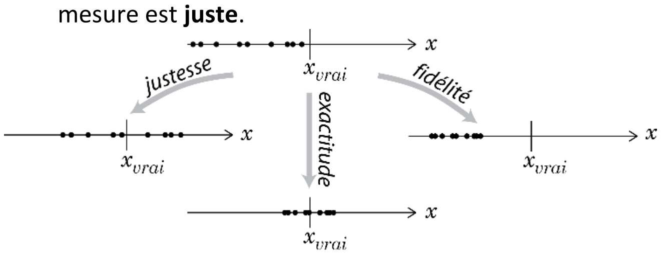
■ Les sources d'erreur

La qualité de l'instrument de mesure, son maniement par l'expérimentateur, les difficultés de repérage ou la variabilité de la grandeur mesurée sont les principales causes d'erreurs de mesure.
On distingue deux types d'erreurs :

- **aléatoires** (pouvant être elles-mêmes dues aux fluctuations de la grandeur mesurée ou de la méthode) ;
- **systématiques** liées à l'appareil de mesure (des indications sont alors fournies par le constructeur).

1.2. Justesse, fidélité, exactitude

Plus les erreurs aléatoires sont faibles, plus la mesure est **fidèle**.
Plus les erreurs systématiques sont faibles, plus la mesure est **juste**.



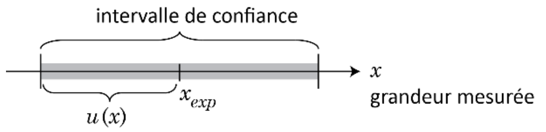
1.3. Incertitude et intervalle de confiance

■ Incertitude de mesure

L'incertitude de mesure est **une estimation** de l'erreur de mesure.
Selon la norme AFNOR l'incertitude sur la mesure d'une grandeur x est notée $u(x)$.

■ Incertitude et intervalle de confiance

Une mesure permet de délimiter **l'intervalle** dans lequel la valeur recherchée à des chances de se trouver. Il est associé à un **niveau de confiance** qui est la probabilité que la valeur recherchée soit comprise dans l'intervalle.



Ces deux énoncés sont équivalents :

« L'incertitude sur la mesure de x vaut $u(x)$ »

et :

« La valeur de x a $N\%$ de chance d'être comprise entre $x_{exp} - u(x)$ et $x_{exp} + u(x)$ »

Plus généralement, on écrira ainsi une valeur obtenue expérimentalement :

$$x = x_{exp} \pm u(x)$$

1.4. Incertitude relative

L'incertitude relative est le quotient :

$$\frac{u(x)}{x_{exp}}$$

Elle est souvent exprimée en pourcentage. Plus elle est faible, plus la mesure est précise.

2. Estimation d'une incertitude

2.1. Évaluation par une approche statistique (type A)

Lorsque N mesures sont effectuées, la meilleure valeur à retenir pour la grandeur mesurée est la valeur moyenne des mesures effectuées, notée $\bar{x}$.
L'estimation de l'incertitude nécessite alors un traitement statistique qui indique la dispersion des valeurs.
L'incertitude-type d'**une** valeur mesurée est l'écart-type :

$$u(x_i) = s_{exp}$$

L'incertitude-type de **la moyenne** des N mesures est l'écart-type sur la moyenne :

$$u(\bar{x}) = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N}}$$

s_{exp} est l'écart-type de la série de valeurs, qui se calcule à l'aide des fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un tableur :

$$s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Le symbole de cet écart-type diffère selon les modèles de calculatrices. Il est noté :

- « Sx » sur les modèles TI ;
- « $x\sigma n - 1$ » sur les modèles Casio ;
- « `Ecart type echantillon` » (pour Numworks).

Remarque : effectuer une telle évaluation de type A revient à choisir un niveau de confiance de 68%. Pour l'augmenter on peut procéder à l'élargissement de l'incertitude ; par exemple $U \approx 2u$ permet d'atteindre un niveau de confiance de 95%.

L'élargissement des incertitudes n'est plus préconisé par les programmes et on ne fera pas mention du niveau de confiance devant les élèves.

2.2. Évaluation par une approche autre que statistique (type B)

L'incertitude d'une mesure effectuée une seule fois conjugue deux sources d'informations :

- des informations techniques sur l'instrument de mesure données par le fabriquant ;
- des informations subjectives sur l'appréciation de la façon dont la mesure a été effectuée.

■ Valeur issue d'une mesure (ou lecture) sans indication supplémentaire

L'utilisation du dernier chiffre est une façon simplifiée de prendre en compte l'incertitude sur une grandeur mesurée donnée sans intervalle et en l'absence d'autre indication : on peut considérer que l'incertitude est égale à la demi-unité du dernier chiffre exprimé.

■ Mesure unique avec un instrument de mesure gradué

L'incertitude correspond à l'erreur commise lors de la lecture. Sans davantage d'indications, on considère que l'incertitude est égale à la demi-graduation ou au demi-écart.

Dans le cas d'une distribution rectangulaire l'incertitude-type vaut :

$$u = \frac{\text{demi} - \text{graduation}}{\sqrt{3}} = 0{,}58 \times \text{demi} - \text{graduation}$$

Pour un instrument vérifié de classe α (généralement analogique), le constructeur indique l'écart maximum toléré (EMT) en pourcentage de la mesure. Avec une distribution rectangulaire l'incertitude-type vaut :

$$u = \frac{EMT}{\sqrt{3}}$$

Dans le cas d'une double lecture sur un instrument gradué, l'incertitude est multipliée par $\sqrt{2}$.

■ Mesure unique avec un instrument à affichage digital

Le constructeur indique pour la précision un pourcentage p de la valeur lue et un nombre N de digit (un digit correspond au dernier chiffre affiché). Il faut chercher cette indication dans la notice de l'appareil. On a alors :

$$u(x_{mes}) = \frac{p \times \text{valeur lue} + N \text{ digit}}{\sqrt{3}}$$
$$\approx p \times \text{valeur lue} + N \text{ digit}$$

■ Prise en compte de différentes sources d'incertitude

Lorsqu'il y a plusieurs sources d'incertitude, il faut tenir compte de toutes les incertitudes et utiliser la relation :

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots}$$

Cependant, il y a parfois un terme qui est très supérieur aux autres, on ne garde alors que celui-là.
Souvent, les valeurs d'incertitude sont de plus en plus faibles selon cet ordre :

1. Incertitudes de repérage par un expérimentateur ;
2. Incertitudes de lecture ;
3. Incertitudes de repérage par un appareil.

■ Grandeur calculée

Dans le cas d'une grandeur calculée à partir de plusieurs grandeurs mesurées, l'incertitude se calcule avec une relation qui sera généralement donnée dans l'exercice. On donne ci-dessous les principaux cas.

Relation	Incertitude
$X = Y + Z$ ou $X = Y - Z$	$u(X) = \sqrt{u(Y)^2 + u(Z)^2}$
$X = \lambda \cdot Y$ (λ constante)	$u(X) = \lvert\lambda\rvert \cdot u(Y)$
$X = \frac{Y}{Z}$ ou $X = Y \cdot Z$	$\frac{u(X)}{X} = \sqrt{\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$
$X = aY + bZ$	$u(X) = \sqrt{a^2(u(Y))^2 + b^2(u(Z))^2}$
$X = kY^aZ^b$	$\frac{u(X)}{\lvert X\rvert} = \sqrt{a^2\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + b^2\left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$

3. Écriture du résultat d'une mesure

3.1. Écrire une incertitude

L'incertitude-type est arrondie par excès pour ne conserver **qu'un seul chiffre significatif**.

3.2. Écrire une valeur mesurée

La valeur d'une grandeur physique doit être écrite afin que le dernier chiffre significatif ait la même position (en écriture décimale) que le chiffre de l'incertitude.
Attention, un chiffre significatif n'est pas un chiffre dont on est sûr mais **un chiffre qui a une signification**.

3.3. Écrire le résultat d'un calcul

Si les valeurs sont données sans les valeurs d'incertitude, le résultat d'un calcul (impliquant multiplications et/ou divisions) doit être écrit avec le nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en possède le moins.
Si les valeurs sont données avec les valeurs d'incertitude, l'incertitude doit être calculée (voir 2.2).

4. Comparaison à une valeur de référence

On compare une valeur mesurée x_{exp} à une valeur de référence $x_{\text{réf}}$ en calculant le quotient suivant :

$$z = \frac{\lvert x_{exp} - x_{ref}\rvert}{u(x)}$$

C'est l'écart rapporté à l'incertitude de mesure.
Ce quotient est souvent appelé *z-score*.
Plus z est faible, plus la mesure peut être jugée compatible avec la valeur de référence (le cas ci-dessous est par exemple assez défavorable). On peut donner aux élèves une valeur seuil, en sachant qu'elle est arbitraire et dépend du niveau de confiance.